Teoria konstrukcji cienkościennych

Ciało utworzone przez dwie zakrzywione powierzchnie nazywane jest powłoką, jeżeli przeciętna odległość między powierzchniami zwana grubością h jest niewielka w stosunku do wymiarów samych powierzchni. Zwykle grubość powłoki jest stała lub skokowo zmienna. Jeśli promienie krzywizny są znacznie większe od jej wymiarów, to taką powłokę nazywamy mało wyniosłą.

Powierzchnię oddaloną jednakowo od powierzchni skrajnych nazywa się powierzchnią środkową powłoki. Analizę ciała trójwymiarowego, jakim jest powłoka, sprowadzamy do analizy powierzchni środkowej powłoki, t.j. do zagadnienia dwuwymiarowego.

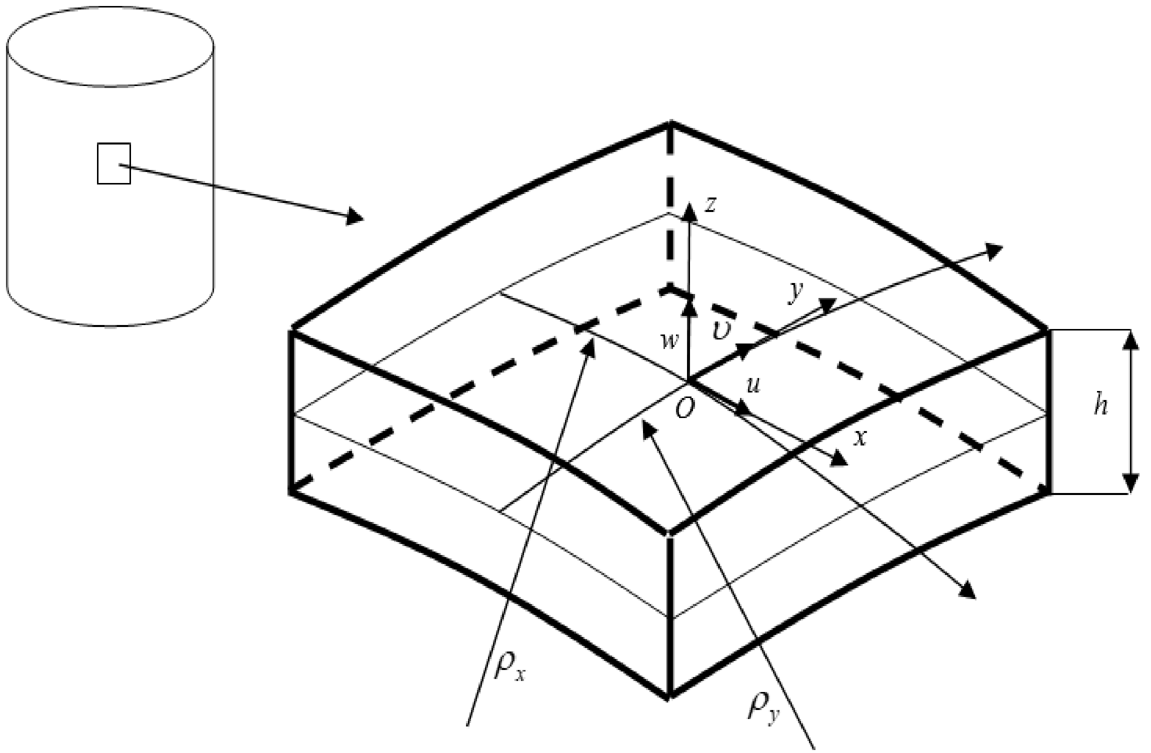
Założenie Kirchoffa-Love'a teorii powłok:

- Proste prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki pozostają również prostymi prostopadłymi do odkształconej powierzchni środkowej.
- Naprężenia w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej mogą zostać pominięte w porównaniu z innymi naprężeniami.

Dodatkowe założenia teorii powłok o małej wyniosłości:

- Grubość powłoki jest wielokrotnie mniejsza od jej pozostałych wymiarów.
- Ugięcie powłoki jest tego samego rzędu, co grubość powłoki.
- Przemieszczenia styczne do powierzchni środkowej są znacznie mniejsze od ugięcia w kierunku prostopadłym.
- Składowe stanu odkształcenia są małe.

Dla zbadania sił wewnętrznych wycinamy z powłoki element, utworzony przez dwie pary przyległych płaszczyzn, prostopadłych do powierzchni środkowej powłoki. Przyjmujemy osie współrzędnych *x* i *y* styczne w punkcie O do linii głównych krzywizn oraz oś *z* normalną do powierzchni środkowej. Główne promienie krzywizny leżące w płaszczyznach *xz* oraz *yz* oznaczmy ρ_x i ρ_y. Kształt geometryczny powłoki w okolicy dowolnego punktu O leżącego na powierzchni środkowej może być opisany za pomocą dwóch głównych promieni krzywizny ρ_x i ρ_y oraz grubości h.



Wycinek powłoki

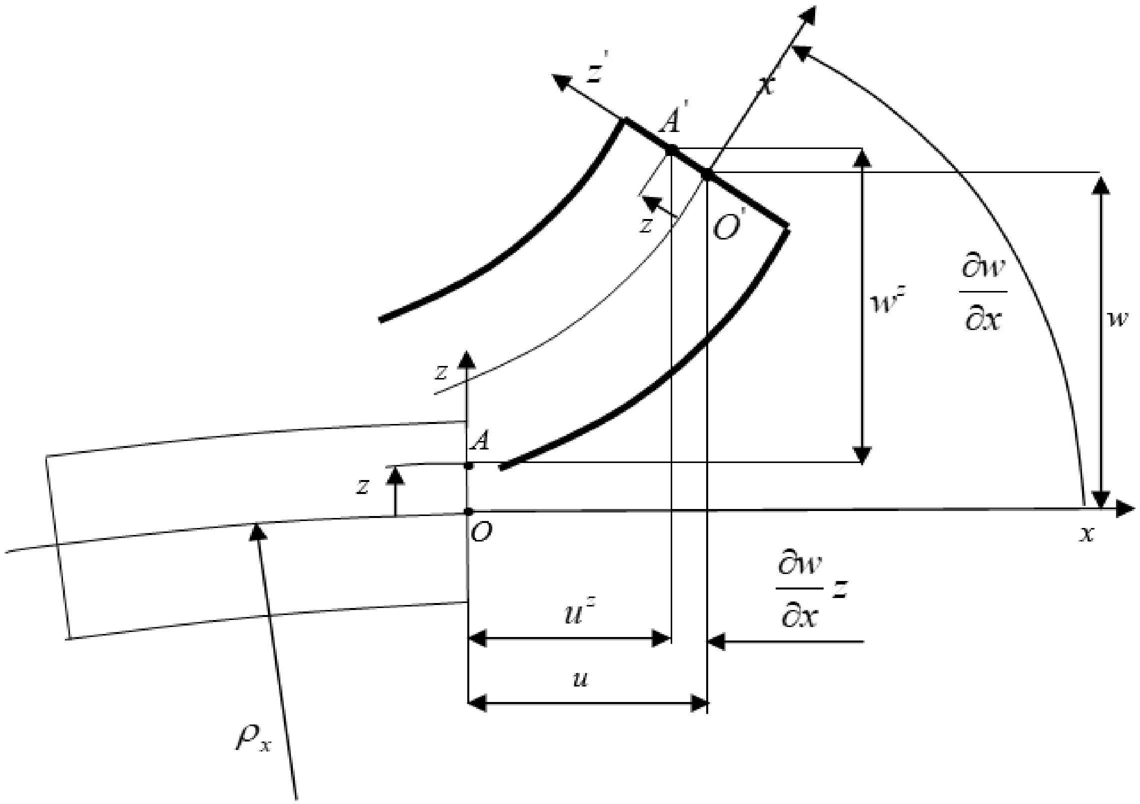
Deformacja powierzchni środkowej oraz przemieszczenia punktów powłoki

Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłoki wywołane obciążeniem będziemy określać w lokalnym układzie kartezjańskim x, y, z związanym z liniami głównych krzywizn. Składowe przemieszczenia punktu O w kierunku osi x, y, z oznaczymy przez u, v, w. Przemieszczenia u, v, w mogą być w ogólnym przypadku funkcjami współrzędnych x, y oraz czasu t.

$$u = u(x, y, t),$$
$$\upsilon = \upsilon(x, y, t),$$
$$w = w(x, y, t).$$

Oczywiście kierunki składowych przemieszczeń w różnych punktach powierzchni środkowej są inne ponieważ ulega zmianie układ współrzędnych x, y, z. Funkcje przemieszczeń u, v, w będą określały całkowicie deformację powłoki oraz pozwalały wyznaczyć naprężenia panujące w niej.

Podczas deformacji układ współrzędnych x, y, z związany z powierzchnią środkową powłoki przemieścił się do położenia x', y', z' pokazanego na rysunku.



Deformacja elementu powłoki w płaszczyźnie *zx* zgodnie z hipotezą Kirchhoffa–Love'a

Załóżmy, że w czasie tego procesu powłoka zachowywała się zgodnie z hipotezą Kirchhoffa–Love'a, według której prosta prostopadła do powierzchni środkowej *OA* pozostaje nadal prosta i prostopadła O'A' do zdeformowanej powierzchni środkowej oraz długość odcinka OA jest równa odcinkowi O'A'. Powyższe założenie pozwala określić przemieszczenie w kierunku osi *x* (u^z)punktu leżącego w odległości *z* od powierzchni środkowej za pomocą przemieszczeń punktu O (u,v,w) w postaci:

$$u^z = u - \frac{\partial w}{\partial x} z$$

przy założeniu, że ugięcia *w* i kąty ugięcia $\frac{\partial w}{\partial x}$ są małe $\left(sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = tg\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Analogiczne rozważania prowadzone w płaszczyźnie *zy* prowadzą do zależności:

$$\upsilon^z = \upsilon - \frac{\partial w}{\partial y} z$$

gdzie υ^z jest przemieszczeniem w kierunku osi *y* punktu leżącego w odległości *z* od powierzchni obojętnej.

Zakładając, że kąty ugięcia $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ są małe $\left(cos\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = cos\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 1\right)$możemy przyjąć przemieszczenie w kierunku osi *z* (w^z) punktu leżącego w odległości *z* od warstwy obojętnej równe:

$$w^z = w$$

Przemieszczenie w kierunku osi *z* (w) często w teorii powłok nazywane jest ugięciem. Znajomość przemieszczeń powierzchni środkowej oraz przyjęcie hipotezy Kirchhoffa–Love'a pozwala zatem określić przemieszczenia dowolnego punktu powłoki.

$$u^z = u - \frac{\partial w}{\partial x} z$$

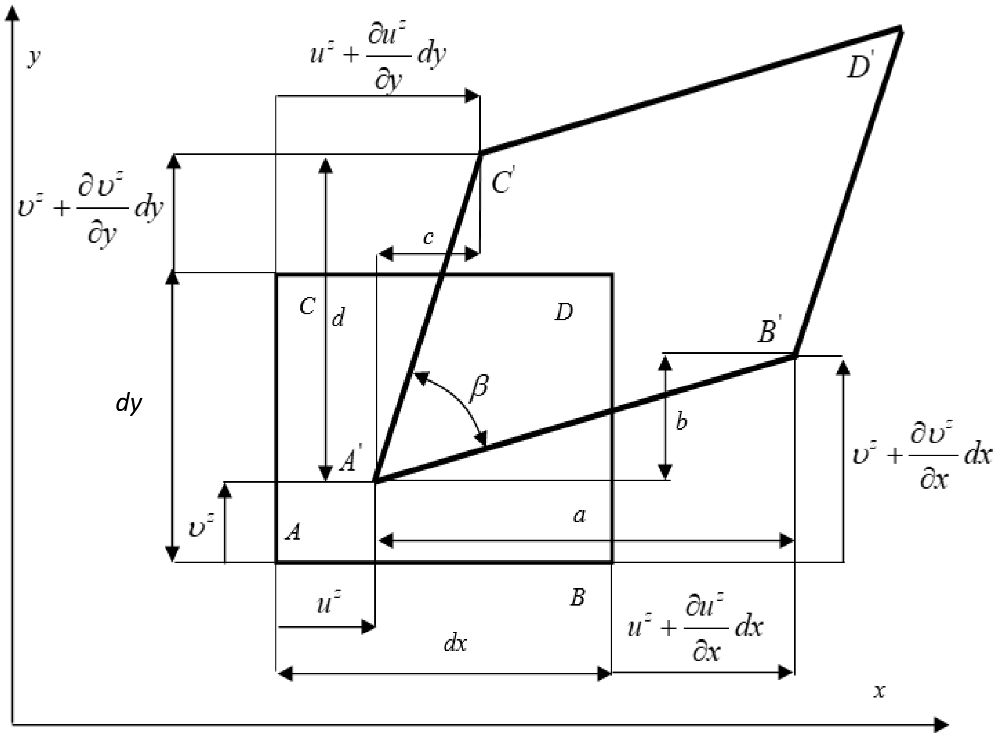
$$\upsilon^z = \upsilon - \frac{\partial w}{\partial y} z$$

$$w^z = w$$

Odkształcenia powłoki

Znając przemieszczenia punktów powłoki możemy określić odkształcenia. W tym samym celu zbadajmy zachowanie się elementarnego prostokąta o wymiarach dx, dy utworzonego w warstwie leżącej w odległości *z* od powierzchni środkowej w trakcie deformacji powłoki.

Zakładając, że elementarny prostokąt *ABCD* o bokach równoległych od osi *x* i *y* po deformacji przemieścił się do położenia $A'B'C'D'$ określimy najpierw odkształcenia wzdłużne ${\varepsilon'}_x^z$, ${\varepsilon'}_y^z$ oraz postaciowe ${\gamma'}_{xy}^z$ wynikające z przemieszczeń u^z, v^z równoległych do powierzchni środkowej. Punkt *A* przesunął się od punktu A' doznając przemieszczeń u^z, v^z. Punkt *B* przesunął się do punktu B' doznając przemieszczeń $u^z + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx$, $v^z + \frac{\partial v^z}{\partial x} dx$, natomiast punkt *C* przesunął się do punktu C' doznając przemieszczeń $u^z + \frac{\partial u^z}{\partial y} dy$, $v^z + \frac{\partial v^z}{\partial y} dy$. Długości boków *AB* i *AC* uległy zmianie oraz kąt prosty *CAB* stał się kątem ostrym (w tym przypadku) $C'A'B'$ (kąt β).



Przemieszczenia i odkształcenia elementarnego prostokąta leżącego w odległości *z* od powierzchni środkowej

Odkształcenia ε'^z_x, ε'^z_y γ'^z_{xy} możemy przedstawić w postaci:

$$\varepsilon'^z_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'} - dx}{dx},$$

$$\varepsilon'^z_y = \frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{AC} = \frac{\overline{A'C'} - dy}{dy},$$

$$\gamma'^z_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Długość odcinka $\overline{A'B'}$ możemy obliczyć jako:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Gdzie:

$$a = dx + u^z + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx - u^z = dx + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx$$

$$b = \upsilon^z + \frac{\partial \upsilon^z}{\partial x} dx - \upsilon^z = \frac{\partial \upsilon^z}{\partial x} dx$$

Zatem:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v^z}{\partial x} dx\right)^2}$$

$$\overline{A'B'} = dx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u^2}{\partial x} + \left(\frac{\partial u^z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^z}{\partial x}\right)^2}$$

które po rozwinięciu w szereg wg wzoru:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n(n!)^2 4^n)} x^n$$

można przedstawić w postaci:

$$\overline{A^{'}B^{'}} = dx\left\{1+\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u^{z}}{\partial x}+\left(\frac{\partial u^{z}}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial \upsilon^{z}}{\partial x}\right)^{2}\right]\right\}$$

Biorąc powyższe pod uwagę odkształcenie ε'^{z}_{x} wyraża się następująco:

$$\varepsilon'^{z}_{x} = \frac{\partial u^{z}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{z}}{\partial x}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^{z}}{\partial x}\right)^{2}$$

Podobne postępowanie prowadzi do określenia odkształcenia ε'^{z}_{y}:

$$\varepsilon'^{z}_{y} = \frac{\partial \upsilon^{z}}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{z}}{\partial y}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^{z}}{\partial y}\right)^{2}$$

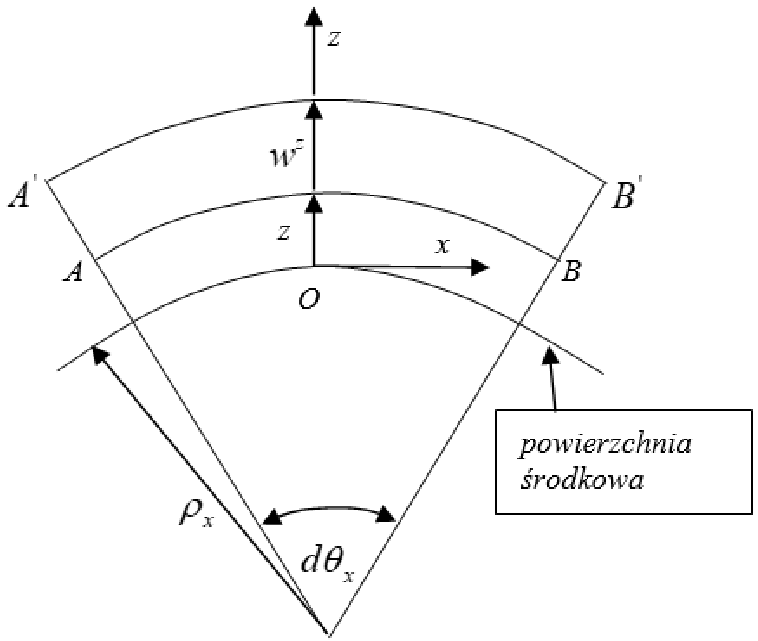
Odkształcenie postaciowe γ'^{z}_{xy} możemy określić jako:

$$\gamma'^{2}_{xy} = \frac{b}{a}+\frac{c}{d} = \frac{\dfrac{\partial \upsilon^{z}}{\partial x}dx}{dx+\dfrac{\partial u^{z}}{\partial x}dx}+\frac{\dfrac{\partial u^{z}}{\partial y}dy}{dy+\dfrac{\partial \upsilon^{z}}{\partial y}dy}$$

Po odrzuceniu wielkości małych otrzymamy:

$$\gamma_{xy}'^{z} = \frac{\partial \upsilon^z}{\partial x} + \frac{\partial u^z}{\partial y}$$

Określimy teraz odkształcenia ε''^{z}_{x}, ε''^{z}_{y} wynikające z promieniowych przemieszczeń w^z normalnych do powierzchni środkowej.



Przemieszczenia promieniowe warstwy leżącej w odległości *z* od powierzchni środkowej pokazane w płaszczyźnie *zx*

Załóżmy, że warstwa *AB* leżąca w płaszczyźnie *zx* oraz odległości *z* od powierzchni środkowej przemieściła się promieniowo o wartość w^z do położenia $A'B'$. Wynikające z tego przemieszczenia odkształcenie ε''^{z}_{x} można otrzymać z zależności:

$$\varepsilon''^{z}_{x} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(\rho_x + z + w^z)d\theta_x - (\rho_x + z)d\theta_x}{(\rho_x + z)d\theta_x} = \frac{w^z}{\rho_x + z}$$

Biorąc pod uwagę, że promień krzywizny jest znacznie większy od grubości h powyższe wyrażanie można przedstawić w postaci:

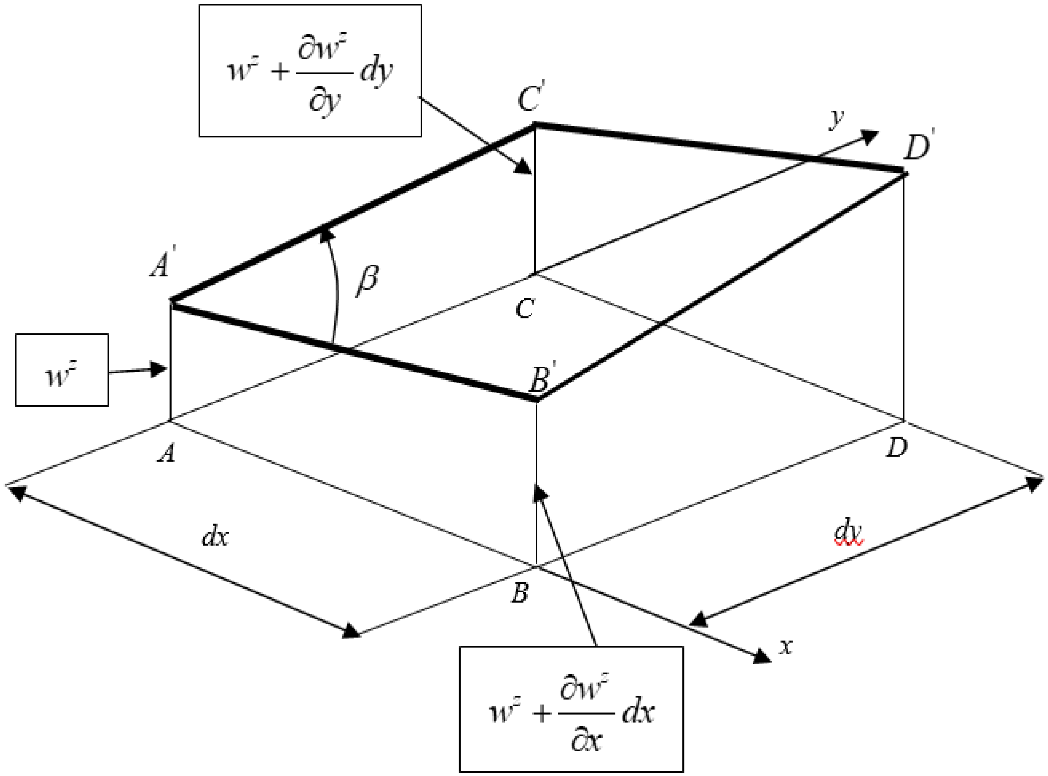
$$\varepsilon''^{z}_{x} \cong \frac{w^z}{\rho_x} = k_x w^z$$

gdzie k_x jest krzywizną linii głównej związanej z osią *x*. W ten sam sposób można określić odkształcenie ε''^{z}_{y}

$$\varepsilon''^{z}_{y} \simeq \frac{w^z}{\rho_y} = k_y w^z$$

gdzie k_y jest krzywizną linii głównej związanej z osią *y*.

Jako ostatnie, określimy odkształcenia ε'''^{z}_{x}, ε'''^{z}_{y}, γ'''^{z}_{xy} wynikające z przemieszczeń w^z (ugięć) wywołujących zginanie.



Deformacje elementarnego prostokąta leżącego w odległości *z* od powierzchni obojętnej wynikające z przemieszczeń w^z

Załóżmy, że elementarny prostokąt *ABCD* o długościach boków dx i dy przemieścił się w czasie deformacji powłoki wynikającej tylko z przemieszczeń w^z do położenia $A'B'C'D'$. Punkt *A* przesunął się do punktu A' doznając przemieszczenia *w*. Punkt *B* przesunął się do punktu B' doznając przemieszczenia $w^z + \frac{\partial w^z}{\partial x} dx$, natomiast punkt *C* przesunął się do punktu C' doznając przemieszczenia $w^z + \frac{\partial w}{\partial y} dy$. Długości boków *AB* i *AC* uległy zmianie oraz kąt prosty *CAB* stał się kątem ostrym $C'A'B'$ (kąt β). Odkształcenia $\varepsilon'''^z_x, \varepsilon'''^z_y, \gamma'''^z_{xy}$ możemy przedstawić w postaci:

$$\varepsilon'''^z_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'} - dx}{dx},$$

$$\varepsilon'''^z_y = \frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C'} - dy}{dy},$$

$$\gamma'''^z_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Długość odcinka $\overline{A'B'}$ możemy obliczyć ze wzoru:

$$\overline{A'B'} = \sqrt{dx^2 + \left(w^z + \frac{\partial w^z}{\partial x}dx - w^z\right)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2}$$

który po rozwinięciu w szereg, ograniczając się do wyrazów w drugiej potędze, można przedstawić w postaci:

$$\overline{A'B'} = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2\right)$$

Po podstawieniu do zależności:

$$\varepsilon_x'''^z = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2 dx - dx}{dx}$$

Otrzymujemy:

$$\varepsilon'''^z_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2$$

Podobne postępowanie prowadzi do zależności:

$$\varepsilon'''^{z}_{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{z}}{\partial y}\right)^{2}$$

Odkształcenie postaciowe γ'''^{z}_{xy} otrzymamy porównując kwadrat długości odcinka $\overline{B'C'}$ obliczony za pomocą twierdzenia cosinusów:

$$\left(\overline{B'C'}\right)^{2} = \left(\overline{A'B'}\right)^{2} + \left(\overline{A'C'}\right)^{2} - 2\left(\overline{A'B'}\right)\left(\overline{A'C'}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma'''^{z}_{xy}\right)$$

i twierdzenia Pitagorasa są:

$$\left(\overline{B'C'}\right)^{2} = \left(\overline{BC}\right)^{2} + \left(w^{z} + \frac{\partial w^{z}}{\partial y}dy - w^{z} - \frac{\partial w^{z}}{\partial x}dx\right)^{2}$$

$$\left(\overline{B'C'}\right)^{2} = \left(\sqrt{dx^{2} + dy^{2}}\right)^{2} + \left(\frac{\partial w^{z}}{\partial y}dy - \frac{\partial w^{z}}{\partial x}dx\right)^{2}$$

$$\left(\overline{B'C'}\right)^{2} = dx^{2} + dy^{2} + \left(\frac{\partial w^{z}}{\partial y}dy - \frac{\partial w^{z}}{\partial x}dx\right)^{2}$$

gdzie $cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma'''^{z}_{xy}\right) \simeq \sin\gamma'''^{z}_{xy} \approx \gamma'''^{z}_{xy}$,

$$\left(\overline{A'B'}\right)^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2\right), \ \left(\overline{A'C'}\right)^2 = dy^2\left(1 + \left(\frac{\partial w^z}{\partial y}\right)^2\right),$$

$$\overline{A'B'} = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2\right), \quad \overline{A'C'} = dy\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial y}\right)^2\right).$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\gamma'''^{z}_{xy} = \frac{\partial w^z}{\partial x}\frac{\partial w^z}{\partial y}$$

Całkowite odkształcenie $\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z, \gamma_{xy}^z$ warstwy leżącej w odległości z od powierzchni środkowej wywołane deformacją powłoki jest sumą składowych odkształceń i może być przedstawione następująco:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x'^z + \varepsilon_x''^z + \varepsilon_x'''^z = \frac{\partial u^z}{\partial x} + k_x w^z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^z}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_y^z = \varepsilon_y'^z + \varepsilon_y''^z + \varepsilon_y'''^z = \frac{\partial \upsilon^2}{\partial x} + k_x w^z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy}^z = \gamma_{xy}'^z + \gamma_{xy}'''^z = \frac{\partial u^z}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon^z}{\partial x} + \frac{\partial w^z}{\partial x}\frac{\partial w^z}{\partial y}.$$

W przypadku cienkich powłok o małej wyniosłości, dla których przemieszczenia w^z znacznie przewyższają przemieszczenia u^zi υ^z, kąty obrotu $\frac{\partial w^z}{\partial x}$ i $\frac{\partial w^z}{\partial y}$są znacznie większe niż pochodne $\frac{\partial u^z}{\partial x}$, $\frac{\partial u^z}{\partial y}$, $\frac{\partial \upsilon^z}{\partial x}$, $\frac{\partial \upsilon^z}{\partial y}$, dlatego też nie popełnimy dużego błędu odrzucając człony kwadratowe $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^z}{\partial x}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^z}{\partial y}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^z}{\partial y}\right)^2$ i $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon^z}{\partial y}\right)^2$ w wyrażeniach na odkształcenia, które będą wyglądały teraz następująco:

$$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u^z}{\partial x} + k_x w^z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_y^z = \frac{\partial \upsilon^z}{\partial y} + k_y w^z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy}^z = \frac{\partial \upsilon^z}{\partial x} + \frac{\partial u^z}{\partial y} + \frac{\partial w^z}{\partial x}\frac{\partial w^z}{\partial y}.$$

Wstawiając do powyższych zależności wzory:

$$u^z = u - \frac{\partial w}{\partial x} z$$

$$v^z = v - \frac{\partial w}{\partial y} z$$

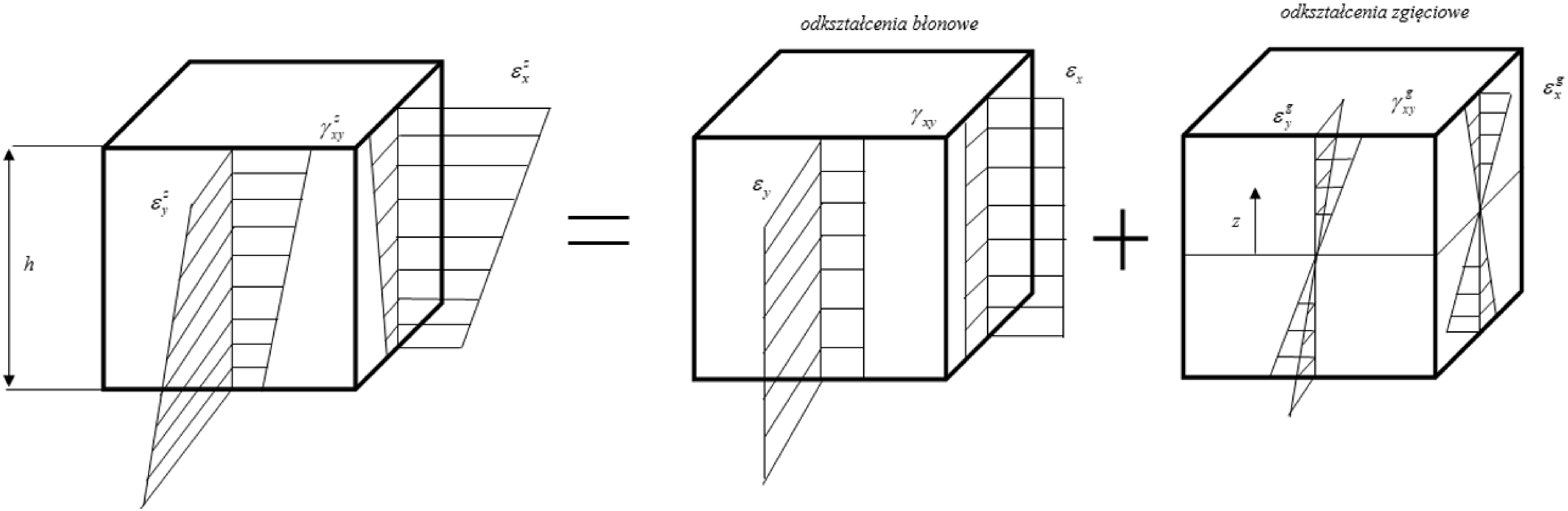
$$w^z = w$$

Otrzymamy odkształcenia warstwy leżącej w odległości *z* od powierzchni środkowej wyrażone za pomocą przemieszczeń punktów leżących na powierzchni środkowej:

$$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\varepsilon_y^z = \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$
$$\gamma_{xy}^z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Należy w tym miejscu zauważyć, że w powyższych wyrażeniach występują nieliniowe człony $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$, $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$ i związki kinematyczne pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami stają się nieliniowe, co znacznie utrudnia rozwiązanie.

Odkształcenia ε_x^z, ε_y^z, γ_{xy}^z zmieniają się liniowo wzdłuż grubości powłoki. Zwykle w takich przypadkach odkształcenia dzieli się na dwie części: odkształcenia stałe obliczone dla $z = 0$ zwane błonowymi $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ oraz liniowo zmienne wzdłuż grubości zwane zgięciowymi $\varepsilon_x^g, \varepsilon_y^g, \gamma_{xy}^g$.



$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + \varepsilon_x^g,$$

$$\varepsilon_y^z = \varepsilon_y + \varepsilon_y^g,$$

$$\gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + \gamma_{xy}^g,$$

Odkształcenie błonowe:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

Odkształcenie zgięciowe:

$$\varepsilon_x^g = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y^g = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy}^g = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Odkształcenia błonowe i zgięciowe są wielkościami zależnymi ponieważ są funkcją tych samych funkcji przemieszczeń u, v, w.

Naprężenia w powłoce oraz wypadkowe siły i momenty

Znając odkształcenia punktów powłoki oraz własności mechaniczne materiału, z równań konstytutywnych (czyli związków pomiędzy naprężeniami a odkształceniami) możemy określić naprężenia w elemencie powłoki. Ze względu na małą grubość powłoki możemy pominąć naprężenia σ_z działające w kierunku osi *z*. Można założyć z dużą dokładnością, że stan naprężenia w poszczególnych warstwach równoległych od powierzchni środkowej odpowiada płaskiemu stanowi naprężenia.

Załóżmy do dalszych rozważań, że własności mechaniczne materiału można opisać liniowym prawem Hooke'a. Naprężenia $\sigma_x^z, \sigma_y^z, \tau_{xy}^z$ normalne i styczne w warstwie leżącej w odległości *z* od powierzchni środkowej możemy zatem przedstawić w postaci:

$$\sigma_x^z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x^z + \nu\varepsilon_y^z\right),$$

$$\sigma_y^z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y^z + \nu\varepsilon_x^z\right),$$

$$\tau_{xy}^z = G\gamma_{xy}^z,$$

gdzie *E* jest modułem Younga, ν – liczbą Poissona, natomiast *G* – modułem sprężystości poprzecznej

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Wstawiając do powyższych wzorów związki na odkształcenia otrzymamy:

$$\sigma_x^z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + \nu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)\right) - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y^z = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right) - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy}^z = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - 2G\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

Podobnie jak odkształcenia, naprężenia $\sigma_x^z, \sigma_y^z, \tau_{xy}^z$ zmieniają się liniowo wzdłuż grubości powłoki. Dzielimy je zwykle na dwie części: naprężenia stałe obliczone dla $z = 0$ zwane błonowymi $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ oraz zmienne po grubości zwane zgięciowymi $\sigma_x^g, \sigma_y^g, \tau_{xy}^g$:

$$\sigma_x^z = \sigma_x + \sigma_x^g,$$

$$\sigma_y^z = \sigma_y + \sigma_y^g,$$

$$\tau_{xy}^z = \tau_{xy} + \tau_{xy}^g.$$

Naprężenia błonowe:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

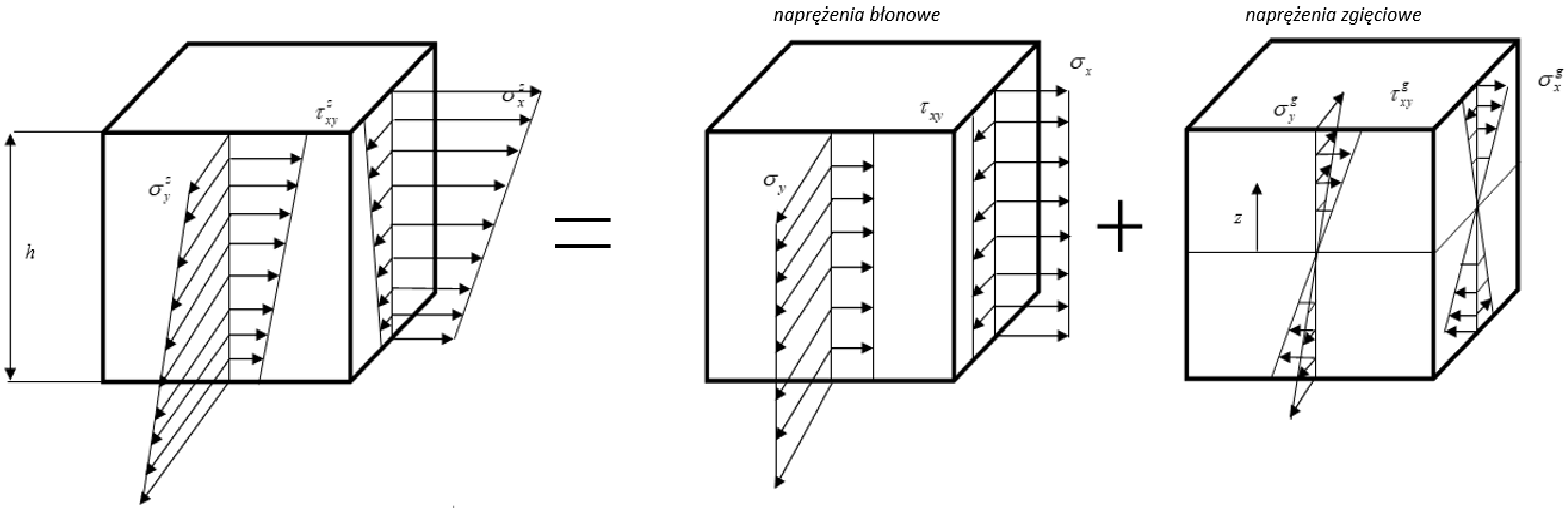
Naprężenia zgięciowe:

$$\sigma_x^g = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y^g = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$\tau_{xy}^g = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

gdzie $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ są odkształceniami błonowymi.



Zmienność naprężeń σ_x^z, σ_y^z, τ_{xy}^z wzdłuż grubości powłoki oraz naprężenia błonowe i zgięciowe

Przy badaniu równowagi elementarnego wycinka powłoki znacznie wygodniej posługiwać się nie bezpośrednio naprężeniami, a ich wypadkowymi tzn. siłami i momentami odniesionymi do jednostki długości boku na powierzchni środkowej. Wypadkowe siły i momenty możemy określić z zależności:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^z dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \sigma_x h,$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^z dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \sigma_y h,$$

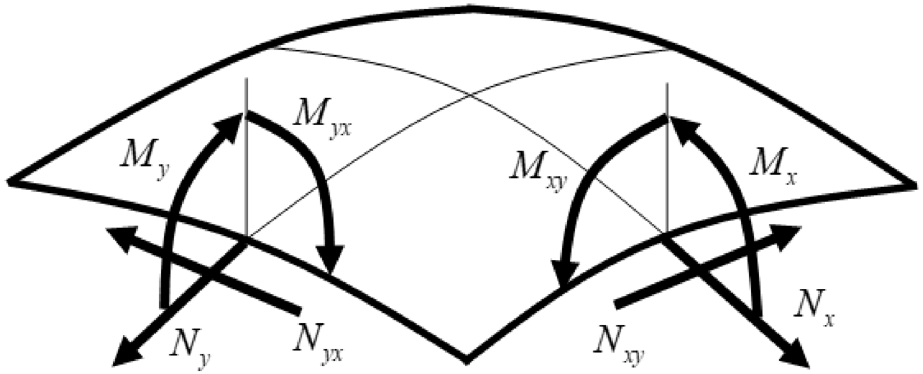
$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}^z dz = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy} h.$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_x^z z dz = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_x^g z dz,$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_y^z z dz = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_y^g z dz,$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{xy}^z z dz = D(1-\nu^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{xy}^g z dz,$$

gdzie $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ są odkształceniami błonowymi, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – naprężeniami błonowymi, $\sigma_x^g, \sigma_y^g, \tau_{xy}^g$ – naprężeniami zgięciowymi, natomiast $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ nazywa się sztywnością płytową.



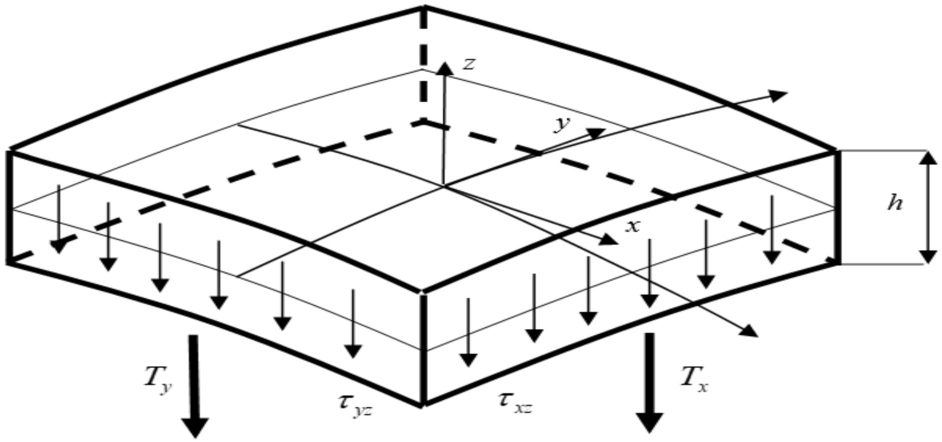
Znajomość wartości sił i momentów pozwala nam określić naprężenia błonowe i naprężenia zgięciowe z następujących związków:

$$\sigma_x = N_x / h, \qquad \sigma_y = N_y / h, \qquad \tau_{xy} = N_{xy} / h,$$

$$\sigma_x^g = \frac{12 M_x z}{h^3}, \quad \sigma_y^g = \frac{12 M_y z}{h^3}, \quad \tau_{xy}^g = \frac{12 M_{xy} z}{h^3}.$$

Oprócz naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ działających w powierzchniach równoległych od powierzchni środkowej muszą działać również naprężenia tnące τ_{yz} i τ_{xz} wywołane siłami poprzecznymi.

Założenia Kirchhoffa–Love'a definiujące deformację powłoki nie przewidują odkształceń γ_{xz}, γ_{yz}, a tym samym i naprężeń τ_{yz} i τ_{xz} w przekrojach powłoki. Dokładniejsze badania teoretyczne i doświadczalne dowodzą, że naprężenia te są w cienkościennych powłokach zwykle małe i mają pomijalny wpływ na otrzymane dotychczas zależności.



Naprężenia tnące i siły tnące w elemencie powłoki